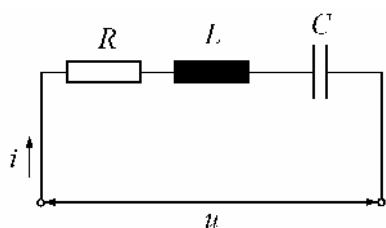


1. Redna veza otpora $R = 670 \Omega$ induktivnosti $L = 8 \text{ H}$ i kapaciteta $C = 4 \mu\text{F}$ priključena je na mrežu napona U , frekvencije $f = 50 \text{ Hz}$. Koliki je napon mreže, ako napon na kondenzatoru iznosi $U_C = 100 \text{ V}$?



Rešenje:

$$I = \frac{U_C}{X_C} = \frac{U_C}{\frac{1}{\omega C}} = U_C \cdot \omega C$$

$$I = 100 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 4 \cdot 10^{-6} = 0,1256 \text{ A}$$

$$U = Z \cdot I$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 = 314 \text{ s}^{-1}$$

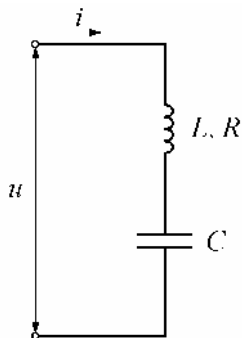
$$X_L = \omega L = 314 \cdot 8 = 2520 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} = 797 \Omega$$

$$Z = \sqrt{670^2 + (2520 - 797)^2} = 1840 \Omega$$

$$U = 1840 \cdot 0,1256 = 231 \text{ V}$$

2. Kalem omske otpornosti $R = 100 \Omega$ induktivnosti $L = 1 \text{ H}$ vezan je na red sa kondenzatorom kapaciteta $C = 10 \mu\text{F}$. Ova sprega priključena je na izvor naizmjenične struje čiji se napon menja sinusoidno sa učestalošću $f = 40 \text{ Hz}$. Efektivna vrednost napona izvora je $U = 100 \text{ V}$. Odrediti:
- prividnu otpornost prijemnika (impedansu),
 - intenzitet struje,
 - fazni pomeraj struje prema naponu.



Rešenje:

$$\text{a) } Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2 \cdot 3,14 \cdot 40 = 251 \text{ s}^{-1}$$

$$X_L = \omega L = 251 \cdot 1 = 251 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{251 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 399 \Omega$$

$$Z = \sqrt{100^2 + (251 - 399)^2} = 179 \Omega$$

$$\text{b) } I = \frac{U}{Z} = \frac{100}{179} = 0,56 \text{ A}$$

$$\text{c) } \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{251 - 399}{100} = -1,48$$

$$\varphi = -56^\circ$$

3. U rednom R, L, C kolu napon i struja menjaju se po zakonima:

$$u = 353,5 \cdot \cos(3000 \cdot t - 10^\circ) \quad [\text{V}]$$

$$i = 12,5 \cdot \cos(3000 \cdot t - 55^\circ) \quad [\text{A}]$$

Ako je induktivnost kola $L = 0,01$ H odrediti termogenu otpornost R i kapacitet kondenzatora C .

Rešenje:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (1)$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (2)$$

$$\text{iz (2):} \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} = R \cdot \text{tg } \varphi$$

$$\text{u (1):} \quad Z^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = R^2 + R^2 \cdot \text{tg}^2 \varphi$$

$$Z^2 = R^2 (1 + \text{tg}^2 \varphi)$$

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{353,5}{12,5} = 28,25 \Omega \quad \Rightarrow \quad Z^2 = 800$$

$$\varphi = -10^\circ - (-55^\circ) = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \text{tg } \varphi = 1$$

$$800 = R^2 \cdot (1 + 1)$$

$$R^2 = 400$$

$$\underline{R = 20 \Omega}$$

$$\text{u (2):} \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} = R \cdot \text{tg } \varphi = 20 \cdot 1 = 20 \Omega$$

$$\omega L = 3000 \cdot 0,01 = 30 \Omega$$

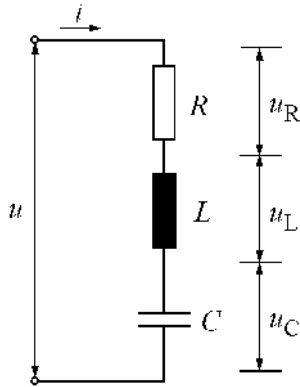
$$\frac{1}{\omega C} = 30 - 20 = 10 \Omega$$

$$C = \frac{1}{10 \cdot \omega} = \frac{1}{10 \cdot 3000} = 0,333 \cdot 10^{-4} \text{ F}$$

$$\underline{C = 33,3 \mu\text{F}}$$

4. Kolo naizmeni ne struje sadrži termogenu otpornost od $12\ \Omega$, kalem induktivnosti $0,15\ \text{H}$ i kondenzator kapacitivnosti $100\ \mu\text{F}$, koji su vezani na red. Kolo je priključeno na izvor naizmeni nog napona efektivne vrednosti od $100\ \text{V}$ i u estanosti $50\ \text{Hz}$. Odrediti:

- impedansu,
 - struju u kolu,
 - pad napona na elementima R , L i C ,
 - fazni pomeraj između struje i napona napajanja.
- Nacrtati odgovarajuće i vektorski dijagram.



Rešenje:

$$\text{a) } Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 = 314\ \text{s}^{-1}$$

$$X_L = \omega L = 314 \cdot 0,15 = 47,2\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 31,8\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{12^2 + (47,2 - 31,8)^2} = 19,5\ \Omega$$

$$\text{b) } I = \frac{U}{Z} = \frac{100}{19,5} = 5,12\ \text{A}$$

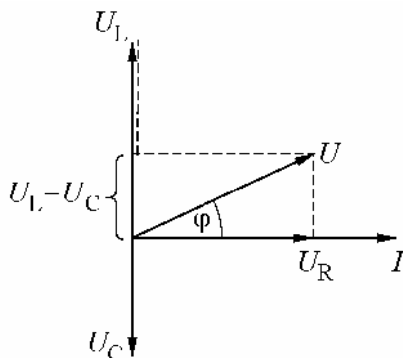
$$\text{c) } U_R = R \cdot I = 12 \cdot 5,12 = 61,5\ \text{V}$$

$$U_L = X_L \cdot I = 47,2 \cdot 5,12 = 243\ \text{V}$$

$$U_C = X_C \cdot I = 31,8 \cdot 5,12 = 163\ \text{V}$$

$$\text{d) } \tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{47,2 - 31,8}{12} = 1,28 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 52^\circ$$

e)



5. Kalem induktivnosti $L = 15 \text{ mH}$ i otpornik otpornosti $R = 10 \Omega$ uklju eni su u kolo prostoperiodi ne struje u estanosti $f = 50 \text{ Hz}$. Efektivna vrednost napona izme u krajeva kalema je $U = 220 \text{ V}$. Odrediti intenzitet napona izme u krajeva kalema u trenutcima u kojima je ems samoindukcije maksimalna.

Rešenje:

Izraz za EMS samoindukcije u kalemu je: $e = -L \frac{di}{dt}$

Kako je izraz za intenzitet struje kalema: $i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$

Indukovana ems bi e: $e = -L \cdot I_m \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$

$$e = X_L \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_1 - \frac{\pi}{2})$$

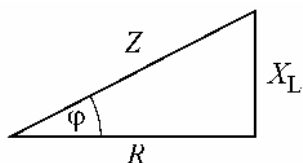
Ems samoindukcije je maksimalna za: $\omega t + \varphi_1 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$\omega t + \varphi_1 = \pi$$

Intenzitet napona izme u krajeva kalema je: $u = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_1 + \varphi)$

U trenutcima maksimalne ems samoindukcije: $u = U \sqrt{2} \cdot \sin(\pi + \varphi)$

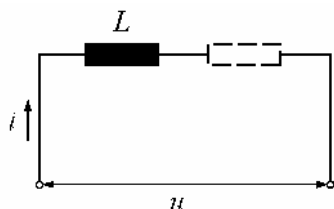
$$u = -U \sqrt{2} \cdot \sin \varphi$$



$$\sin \varphi = \frac{X_L}{Z} = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{2\pi f \cdot L}{\sqrt{R^2 + (2\pi f L)^2}} = 0,426$$

Odnosno tražena trenutna vrednost napona je: $u = -220 \cdot \sqrt{2} \cdot 0,426 \cong -132 \text{ V}$.

6. Kalem induktivnosti $L = 10 \text{ mH}$ vezan je na red sa elementom nepoznatih karakteristika i ova redna veza je priklju ena na prostoperiodi ni napon intenziteta $u = 50 \cdot \sin(5000 \cdot t + \pi / 3) \text{ [V]}$. Izraz za intenzitet struje u ovom kolu je $i = 0.25 \cdot \sin(5000 \cdot t + 5\pi / 6) \text{ [A]}$, pri emu su referentni smerovi za napon i struju usaglašeni. Odrediti koji je element vezan na red sa kalemom i njegove karakteristike.



Rešenje:

Fazna razlika napona na krajevima redne veze i struje u kolu je:

$$\varphi = \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$$

struja predhodi naponu, što zna i da je celo kolo kapacitivnog karaktera.

Element vezan na red sa kalemom je, prema tome, kondenzator, i to:

$$X_C > X_L,$$

$$\frac{1}{\omega C} > \omega L, \quad \text{odnosno} \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} < 0$$

Impedansa celog kola je:

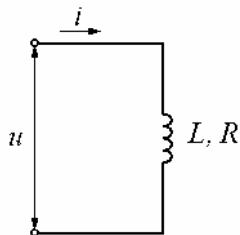
$$Z = \sqrt{(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = \left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right| = -\omega L + \frac{1}{\omega C}$$

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L + Z$$

$$C = \frac{1}{\omega(\omega L + Z)} = \frac{1}{5000(5000 \cdot 10 \cdot 10^{-3} + 200)} = 8 \cdot 10^{-7} \text{ F}$$

$$C = 0,8 \mu\text{F}$$

7. Kalem bez jezgra priključen je na prostoperiodični napon $u = 100 \cdot \sin(2000 \cdot t)$ [V]. Intenzitet struje u kalemu je: $i = 25 \cdot \sin(2000 \cdot t - \pi/3)$ [A], pri čemu su referentni smerovi za struju i napon usaglašeni. Odrediti izraz za intenzitet struje kada je kružna učestanost napona dva puta manja.



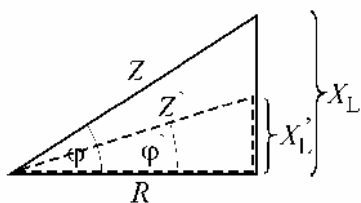
Rešenje:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{100}{25} = 4\Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\omega = 2000\text{s}^{-1}$$

$$R = ?, L = ?$$



$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} \Rightarrow R = Z \cdot \cos \varphi$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3} = 60^\circ \Rightarrow R = 4 \cdot \cos 60^\circ$$

$$R = 2\Omega$$

$$Z = \sqrt{2^2 + (2000 \cdot L)^2} = 4\Omega$$

$$(2000 \cdot L)^2 = 12$$

$$L^2 = 3 \cdot 10^{-6}$$

$$L = 1,73\text{mH}$$

$$\omega' = \frac{\omega}{2} = 1000\text{s}^{-1}$$

$$Z' = \sqrt{2^2 + (1000 \cdot L)^2} = 2,64\Omega$$

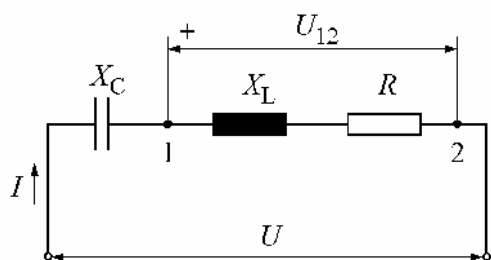
$$I_m' = \frac{U_m}{Z'} = \frac{100}{2,64} = 37,8\text{A}$$

$$\cos \varphi' = \frac{R}{Z'} = \frac{2}{2,64} = 0,76$$

$$\varphi' = 40,53^\circ = 0,714\text{rad}$$

$$i' = 37,8 \cdot \sin(1000 \cdot t - 0,714) \text{ [A]}$$

8. Odrediti efektivnu vrednost prostoperiodi nog napona U u kolu prikazanom na slici, ako je $U_{12} = 50 \text{ V}$, $X_C = 100 \Omega$, $X_L = 400 \Omega$ i $R = 300 \Omega$.



Rešenje:

$$Z_{12} = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500 \Omega$$

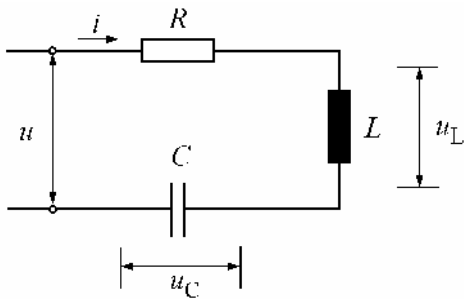
$$I = \frac{U_{12}}{Z_{12}} = \frac{50}{500} = 0,1 \text{ A}$$

$$I = \frac{U}{Z}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{300^2 + (400 - 100)^2} = 424,26 \Omega$$

$$U = Z \cdot I = 424,26 \cdot 0,1 \cong 42,43 \text{ V}$$

9. Struja u prikazanom delu kola fazno zaostaje za naponom za $\pi/6$. Maksimalna vrednost napona izme u krajeva kalema je dva puta ve a od maksimalne vrednosti napona izme u elektroda kondenzatora. Izraz za intenzitet napona kalema je: $u_L = 10 \cdot \sin 1000t$ [V]. Aktivna otpornost prikazanog dela kola je $R = 20 \Omega$. Odrediti induktivnost L i kapacitivnost C .



Rešenje:

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_L}{U_C} &= \frac{\frac{U_{Lm}}{\sqrt{2}}}{\frac{U_{Cm}}{\sqrt{2}}} = \frac{U_{Lm}}{U_{Cm}} = 2 \\ \frac{U_L}{U_C} &= \frac{X_L I}{X_C I} = \frac{X_L}{X_C} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{X_L = 2X_C}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow X_L - X_C = R \cdot \operatorname{tg} \varphi = 20 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 11,55 \Omega$$

$$2X_C - X_C = 11,55 \Omega$$

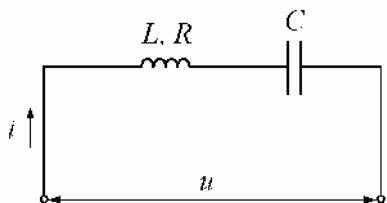
$$X_C = 11,55 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} = \frac{1}{1000 \cdot 11,55} = 86,58 \mu\text{F}$$

$$X_L = 2X_C = 23,1 \Omega$$

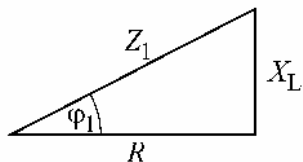
$$X_L = \omega L \Rightarrow L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{23,1}{1000} = 23,1 \text{mH}$$

10. Redna veza kalema i idealnog kondenzatora priklju ena je na prostoperiodi ni napon efektivne vrednosti $U=80\text{ mV}$. Pri datoj u estanosti napona impedansa i faktor snage kelema su $Z_1=20\ \Omega$ i $\cos\varphi_1=0,8$ a kapacitivna otpornost kondenzatora je $X_C=12\ \Omega$. Odrediti efektivnu vrednost struje u kolu i faznu razliku izme u priklju enog napona i struje.



Rešenje:

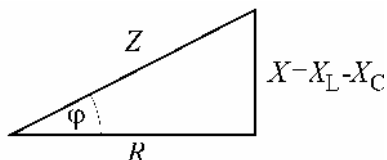
Impedansa kalema jednaka je:



$$Z_1 = \sqrt{R^2 + X_L^2} \quad \Rightarrow \quad R = Z_1 \cos \varphi = 20 \cdot 0,8 = 16\ \Omega$$

$$X_L = Z_1 \sin \varphi = 20 \cdot 0,6 = 12\ \Omega$$

Impedansa redne veze kalema i kondenzatora iznosi:



$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{16^2 + (12 - 12)^2} = 16\ \Omega$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{80 \cdot 10^{-3}}{16} = 5\text{mA}$$

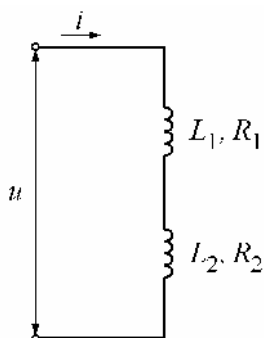
$$\text{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = 0$$

$$\varphi = 0$$

Ukupna reaktivna otpornost je jednaka nuli (rezonanca), odnosno, struja i napon redne veze kalema i kondenzatora su u fazi.

11. Redna veza dva kabela priključena je na mrežu napona 480 V i uzima iz mreže struju od 10 A uz faktor snage 0,6. Prvi kalem ima aktivni otpor od 6 Ω, a drugi kalem ima induktivni otpor od 8 Ω. Potrebno je odrediti:

- aktivni otpor drugog kabela,
 - induktivni otpor prvog kabela,
 - napone na krajevima pojedinačnih kabela.
- Nacrtati vektorski dijagram struja i napona.



Rešenje:

Za rednu vezu dva omsko induktivna potrošača može se napisati:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L}{R}$$

gde je: R - ukupna aktivna otpornost redne veze, $R = R_1 + R_2$

X_L - ukupna reaktivna otpornost, $X_L = X_{L1} + X_{L2}$

$$L = L_1 + L_2$$

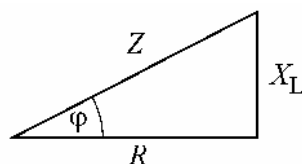
$$\omega L = \omega L_1 + \omega L_2$$

a) $R = Z \cdot \cos \varphi$

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{480}{10} = 48 \Omega$$

$$R = 48 \cdot 0,6 = 28,8 \Omega$$

$$R_2 = R - R_1 = 28,8 - 6 = 22,8 \Omega$$



b) $X_L = Z \cdot \sin \varphi$

$$X_L = 48 \cdot 0,8 = 38,4 \Omega$$

$$X_{L1} = X_L - X_{L2} = 38,4 - 8 = 30,4 \Omega$$

c) $U_1 = Z_1 I$

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_{L1}^2} = \sqrt{6^2 + 30,4^2} = 31 \Omega$$

$$U_1 = 310 \text{ V}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{X_{L1}}{R_1} = \frac{30,4}{6} = 5,066 \quad \Rightarrow \quad \underline{\varphi_1 \cong 79^\circ}$$

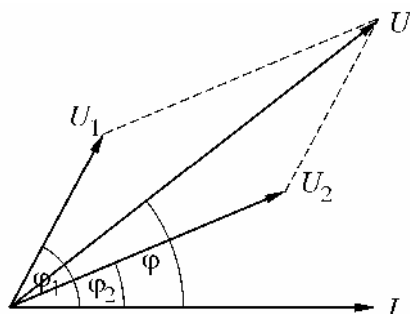
$$U_2 = Z_2 I$$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_{L2}^2} = \sqrt{22,8^2 + 8^2} = 24 \Omega$$

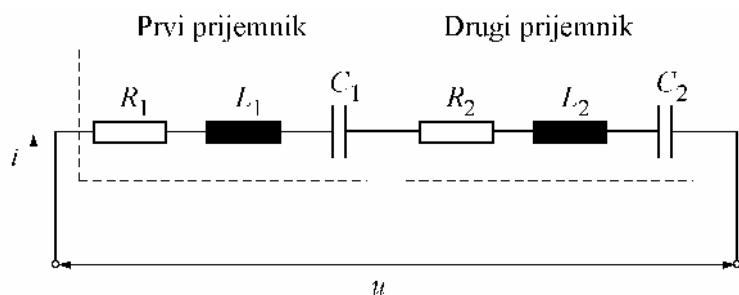
$$U_2 = 240 \text{ V}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{X_{L2}}{R_2} = \frac{8}{22,8} = 0,35 \quad \Rightarrow \quad \underline{\varphi_2 \cong 19,5^\circ}$$

d)



12. Dva prijemnika karakteristika $R_1 = 30 \Omega$, $L_1 = 6 \text{ mH}$, $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $R_2 = 50 \Omega$, $L_2 = 10 \text{ mH}$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$ vezana su na red i priključena u kolo naizmenične struje kružne u estanosti $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$. Odrediti:
- impedanse pojedinih prijemnika,
 - fazne razlike napona i struje pojedinih prijemnika,
 - impedansu redne veze prijemnika,
 - faznu razliku napona na krajevima redne veze prijemnika i struje prijemnika.



Rešenje:

- a) Aktivna otpornost prvog prijemnika je: $R_1 = 30 \Omega$,

reaktivna otpornost prvog prijemnika je: $X_1 = X_{L1} - X_{C1} = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = -40 \Omega$.

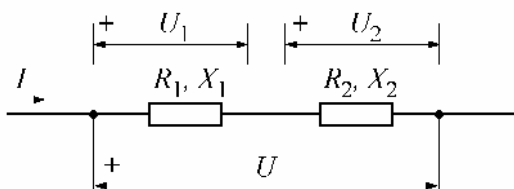
Prvi prijemnik je pretežno kapacitivan i njegova impedansa je: $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2} = 50 \Omega$.

Aktivna otpornost drugog prijemnika je: $R_2 = 50 \Omega$,

reaktivna otpornost drugog prijemnika je: $X_2 = X_{L2} - X_{C2} = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = 50 \Omega$.

Drugi prijemnik je pretežno induktivan impedanse: $Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2} = 50\sqrt{2} \Omega$.

- b) Za usaglašene referentne smerove napona i struja, koji su dati na slici:



Fazne razlike napona i struje pojedinih prijemnika su:

$$\text{tg } \varphi_1 = \frac{X_1}{R_1} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \text{arctg} \frac{X_1}{R_1} = -53,13^\circ$$

$$\text{tg } \varphi_2 = \frac{X_2}{R_2} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = \text{arctg} \frac{X_2}{R_2} = 45^\circ$$

c) Za rednu vezu dva prijemnika na slici može se napisati:

$$u = u_1 + u_2$$

$$\text{Ako je: } i = I_m \sin(\omega t + \varphi),$$

za trenutnu vrednost napona na kraju redne veze prijemnika važi:

$$u = R_1 I_m \sin(\omega t + \varphi) + X_1 I_m \cos(\omega t + \varphi) + R_2 I_m \sin(\omega t + \varphi) + X_2 I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$u = (R_1 + R_2) I_m \sin(\omega t + \varphi) + (X_1 + X_2) I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Iz poslednjeg izraza sledi da je aktivna otpornost redne veze dva prijemnika jednaka zbiru njihovih aktivnih otpornosti:

$$R = R_1 + R_2 = 30 + 50 = 80\Omega$$

tako e, da je reaktivna otpornost redne veze dva prijemnika jednaka zbiru njihovih reaktivnih otpornosti:

$$X = X_1 + X_2 = -40 + 50 = 10\Omega$$

Redna veza ova dva prijemnika je pretežno induktivna, jer reaktivna otpornost ima pozitivnu vrednost ($X_{L1} + X_{L2} > X_{C1} + X_{C2}$), a impedansa ove redne veze je:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = 80,6\Omega$$

d) Fazna razlika napona izme u krajeva redne veze prijemnika i struje prijemnika dobija se iz:

$$\text{tg}\varphi = \frac{X}{R}$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{X}{R} = \text{arctg} \frac{10}{80} = 7,12^\circ$$